Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Postupkom transformacije analogne funkcije prenosa u digitalnu funkciju prenosa treba da se očuvaju neka važna svojstva analognog sistema.

1. Transformacija mora biti racionalna, tj. polazeći od analogne funkcije prenosa koja je racionalna funkcija kompleksne učestanosti s, treba da se dobije racionalna funkcija kompleksne učestanosti z.

2. Zbog održanja stabilnosti sistema, polovi analogne funkcije prenosa koji leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti s, moraju se preslikati unutar jediničnog kruga u ravni kompleksne učestanosti z.

3. Poželjno je da se transformacijom ne povećava red funkcije prenosa.

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Impulsno invarijantna transformacija

Ideja
impulsni odziv diskretnog sistema h[n]
dobija se diskretizacijom
impulsnog odziva analognog sistema $h_a(t)$

$$h[n] = h_a(nT),\ n = 0,1,\ldots$$

Šta se dešava u frekvencijskom domenu?

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[j\left(\omega + k\omega_s\right)\right] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[j\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2k\pi}{T}\right)\right]$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Impulsno invarijantna transformacija

$$H_a(j\omega) \approx 0, \ |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$$

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} H_a[j(\omega + k\omega_s)] \approx 0, \ |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\omega) = \frac{1}{T} H_a\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \ |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

Ništa novo, sve već poznato i izvedeno

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Impulsno invarijantna transformacija

Ako je zadovoljen uslov

$$H_a(j\omega) \approx 0, \ |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$$

I polovi analogne funkcije prosti

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s - p_i}$$

Inverzna Laplasova transformacija

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Impulsno invarijantna transformacija

Diskretizacija

$$h_a(nT) = h[n] = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i n T}$$

Z transformacija

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^{N} (z - e^{p_i T})}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Impulsno invarijantna transformacija

polovi analognog sistema p_i preslikavaju se u polove digitalnog sistema z_i

$$z_i = e^{p_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)T}$$

položaj nula diskretnog sistema se ne može predvideti

1. Konjugovano kompleksni par polova iz s ravni preslikavanjem daje konjugovano kompleksni par polova u z ravni. Koeficijenti diskretne funkcije prenosa su realni, tj. transformacija je racionalna.

2. Transformacija je stabilna jer se polovi stabilnog analognog sistema, kod kojih je $\sigma < 0$ i , preslikavaju u polove diskretnog sistema unutar jediničnog kruga.

3. Treće, ne povećava se red funkcije prenosa.

Veza između analogne učestanosti ω i digitalne učestanosti Ω je linearna.

$$\Omega = \omega T = 2\pi f / f_s = 2\pi F$$

gde je F normalizovana učestanost

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Modifikovana impulsno invarijantna transformacija

Kada je funkcija prenosa analognog sistema racionalna, (ima nula), obično je teško zadovoljiti uslov ograničenosti frekvencijskog odziva

$$H_a(s) = H_0 \frac{N(s)}{D(s)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)}$$

$$H_a(s) = H_0 \frac{H_{a1}(s)}{H_{a2}(s)} \qquad H_{a1}(s) = \frac{1}{D(s)} \qquad H_{a2}(s) = \frac{1}{N(s)}$$

Samo polovi!

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Modifikovana impulsno invarijantna transformacija

$$H_1(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}$$

$$H_2(z) = \sum_{i=1}^{M} \frac{B_i z}{z - e^{s_i T}} = \frac{N_2(z)}{D_2(z)}$$

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a1}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a1}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \le \frac{\omega_s}{2}$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a2}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a2}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \le \frac{\omega_s}{2}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Modifikovana impulsno invarijantna transformacija

$$H(z) = H_0 \frac{H_1(z)}{H_2(z)} = H_0 \frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} = H_0 \frac{N_1(z)}{N_2(z)} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^{N}(z - e^{p_i T})}$$

Važi

$$H(e^{j\Omega}) = H_0 \frac{H_1(e^{j\Omega})}{H_2(e^{j\Omega})} = H_a(j\omega) = H_a\left(\frac{j\Omega}{T}\right)$$

Problem:

Polinom $D_1(z)$ *sigurno ima korenove unutar* ***jediničnog*** *kruga jer se oni dobijaju* preslikavanjem polova analogne funkcije prenosa.

Položaj korenova polinoma $N_2(z)$ *se ne* ***može*** *kontrolisati, tako da se deo polova* ***može naći*** *izvan* ***jediničnog*** *kruga.*

Nestabilna funkcija prenosa!

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Usklađena Z transformacija

$$H(z) = H_0 \frac{H_1(z)}{H_2(z)} = H_0 \frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} = H_0 \frac{N_1(z)}{N_2(z)} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^{N}(z - e^{p_i T})}$$

$$L = N - M$$

$$H(z) = H_0 (z+1)^L \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^{N}(z - e^{p_i T})}$$

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

Najčešće korišćenja

Idealni integrator

$$H_I(s) = \frac{1}{s}$$

$$h_I(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0^+ \\ 0 & t \leq 0^- \end{cases}$$

Odziv na proizvoljnu pobudu - konvolucija

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_I(t-\tau) d\tau$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

Neka je $0^+ < \tau \leq t_1 < t_2$. Tada važi:

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(\tau) h_I(t_2-\tau) d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau) h_I(t_1-\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) d\tau$$

$$h_I(t_1-\tau) = h_I(t_2-\tau) = 1$$

$$t_1 \approx t_2$$

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2}\left[x(t_1) + x(t_2)\right]$$

$$t_1 = nT - T, \; t_2 = nT$$

$$y(nT) - y(nT-T) = \frac{T}{2}\left[x(nT-T) + x(nT)\right]$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

diferencna

$$y(nT)-y(nT-T)=\frac{T}{2}\left[x(nT-T)+x(nT)\right]$$

Z transformacija

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)=\frac{T}{2}\left[z^{-1}X(z)+X(z)\right]$$

odnosno

$$H_I(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

analogna

$$H_I(s)=\frac{1}{s}$$

diskretna

$$H_I(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

smenom

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Bilinearna transformacija

Odziv na proizvoljnu pobudu diskretnog sistema je približno jednak odzivu analognog sistema od koga je dobijen transformacijom.

Bilinearna transformacija je racionalna transformacija koja ne povećava red funkcije prenosa.

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne - Bilinearna transformacija

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0a}\left.\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-u_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)}\right|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0d}(z+1)^{N-M}\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

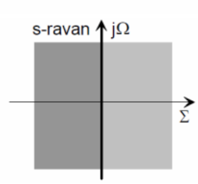
Digitalna obrada signala

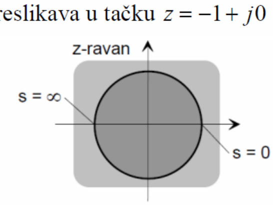
Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

Stabilnost?

$$z = \frac{2/T+s}{2/T-s} \qquad s = \sigma + j\omega \qquad |z| = \left[\frac{(2/T+\sigma)^2+\omega^2}{(2/T-\sigma)^2+\omega^2}\right]^{1/2}$$

1. Imaginarna osa u s-ravni ($\sigma = 0$) se preslikava u jedinični krug u z-ravni ($|z| = 1$).
2. Leva polovina s-ravni ($\sigma < 0$) se preslikava unutar jediničnog kruga u z-ravni ($|z| < 1$).
3. Desna polovina s-ravni ($\sigma > 0$) se preslikava izvan jediničnog kruga u z-ravni ($|z| > 1$).
4. Koordinatni početak iz s-ravni ($s = 0 + j0$) se preslikava u tačku $z = 1 + j0$ u z-ravni.
5. Tačka u beskonačnosti iz s-ravni ($s = \infty$) se preslikava u tačku $z = -1 + j0$ u z-ravni.





Stabilna?

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne – Bilinearna transformacija

Preslikavanje učestanosti baš i nije linearno

$$|z| = \left[\frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$$

Da vidimo šta se dešava

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \qquad s = j\omega \ \text{i} \ z = e^{j\Omega} \qquad j\omega = \frac{2}{T}\frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega} + 1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}}$$

$$\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0a}\left.\frac{\prod_{i=1}^{M}(s - u_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)}\right|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0d}(z+1)^{N-M}\frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}$$

Zbog nelinearne transformacije učestanosti,
amplitudska i fazna karakteristika su izobličene.

Posle bilinearne transformacije, vrednosti amplitude ostaju iste samo se menja položaj maksimuma i minimuma amplitudske karakteristike.

Isto je i sa fazom.
Bitna faza – impulsno invarijantne transformacije.

Kod preslikavanja selektivnih filtarskih funkcija, gde fazna karakteristika nije od interesa,
efekat distorzije skale učestanosti se može eliminisati predistorzijom karakteristike analognog filtra.

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

1. Zadavanje specifikacija u diskretnom domenu i predistorzija karakterističnih učestanosti
2. Određivanje reda N i sinteza analognog filtra na osnovu specifikacija
3. Transformacija nula i polova analognog filtra u nule i polove diskretnog filtra

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s}$$

4. Izračunavanje multiplikativne konstante H_{0d} iz $H(1) = H_a(0)$ ili sličnog uslova

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0a} \left. \frac{\prod_{i=1}^{M}(s-u_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)} \right|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_{0d}(z+1)^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

5. Formiranje $H(z)$
6. $\boxed{\text{Preslikavanje } H(z) \text{ u drugi tip funkcije prenosa, ukoliko nije izvršeno u fazi 2}}$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

Da bi se držali notacije u knjizi.

Ranije

ω analogna prototipska učestanost pri čemu je najzgodnije bilo $\omega_p = 1$

$\hat{\omega}$ stvarne željene učestanosti

U nastavku

Ω učestanosti u digitalnom domenu $0 \le \Omega \le 2\pi \quad (0 \le f \le 2f_s)$

$\overline{\Omega}$ željene učestanosti u digitalnom domenu $0 \le \overline{\Omega} \le 2\pi \quad (0 \le \bar{f} \le 2f_s)$

ω analogne učestanosti

$\overline{\omega}$ željene analogne učestanosti

$\tilde{\omega}$ analogna prototipska učestanost pri čemu je najzgodnije $\tilde{\omega}_p = 1$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

kod NF filta

$$\overline{\omega}_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}$$

$$\overline{\omega}_a = \frac{2}{T}\tan\frac{\overline{\Omega}_a}{2}$$

Zanimljivo je da će se zbog distorzije učetanosti pojaviti

$$\frac{\overline{\omega}_a}{\overline{\omega}_p} = \frac{\tan\frac{\overline{\Omega}_a}{2}}{\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}} > \frac{\overline{\Omega}_a}{\overline{\Omega}_p}$$

Strmina diskretnog veća

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

NF -> NF

$$\tilde{\omega} = a\overline{\omega}$$

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T}a\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2} \rightarrow \tilde{\omega}_p = 1 \rightarrow a = \frac{T\tilde{\omega}_p}{2\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}}$$

$$\tilde{\omega}_a = \frac{2}{T}a\tan\frac{\overline{\Omega}_a}{2}$$

$$\boxed{k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}}{\tan\frac{\overline{\Omega}_a}{2}}}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

NF -> VF

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{\overline{\omega}}$$

$$\tilde{\omega}_p = \frac{a}{\frac{2}{T}\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}} \rightarrow \tilde{\omega}_p = 1 \rightarrow a = \frac{2\tilde{\omega}_p \tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}}{T}$$

$$\boxed{k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\overline{\omega}_a}{\overline{\omega}_p} = \frac{\tan\frac{\overline{\Omega}_a}{2}}{\tan\frac{\overline{\Omega}_p}{2}}}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

NF -> PO

Učestanosti se preslikavaju

$$\overline{\omega}_{pi} = \frac{2}{T}\tan\frac{\overline{\Omega}_{pi}}{2}, \quad i = 1,2$$

$$\overline{\omega}_{ai} = \frac{2}{T}\tan\frac{\overline{\Omega}_{ai}}{2}, \quad i = 1,2$$

$$\left.\begin{aligned} K_A &= \tan\frac{\overline{\Omega}_{p2}}{2} - \tan\frac{\overline{\Omega}_{p1}}{2} \\ K_B &= \tan\frac{\overline{\Omega}_{p1}}{2}\tan\frac{\overline{\Omega}_{p2}}{2} \\ K_C &= \tan\frac{\overline{\Omega}_{a1}}{2}\tan\frac{\overline{\Omega}_{a2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Pomoćne konstante

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti NF->PO

$$B\tilde{\omega}_p = \overline{\omega}_{p2} - \overline{\omega}_{p1}$$

$$B\tilde{\omega}_a = \overline{\omega}_{a2} - \overline{\omega}_{a1}$$

$$\overline{\omega}_0^2 = \overline{\omega}_{p1}\overline{\omega}_{p2} = \overline{\omega}_{a1}\overline{\omega}_{a2}$$

$$\overline{\omega}_{p1}, \overline{\omega}_{p2} = \frac{1}{2}\left(\pm\tilde{\omega}_p B + \sqrt{\tilde{\omega}_p^2 B^2 + 4\overline{\omega}_0^2}\right)$$

$$\overline{\omega}_{a1}, \overline{\omega}_{a2} = \frac{1}{2}\left(\pm\tilde{\omega}_a B + \sqrt{\tilde{\omega}_a^2 B^2 + 4\overline{\omega}_0^2}\right)$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti NF->PO

Stvarni u prototipski $\tilde{\omega} = \frac{1}{B}\left(\overline{\omega} - \frac{\overline{\omega}_0^2}{\overline{\omega}}\right)$

$$B = \frac{\overline{\omega}_{p2} - \overline{\omega}_{p1}}{\tilde{\omega}_p} = \frac{2\left(\tan\frac{\overline{\Omega}_{p2}}{2} - \tan\frac{\overline{\Omega}_{p1}}{2}\right)}{T\tilde{\omega}_p} = \frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p}$$

$$\overline{\omega}_0 = \sqrt{\overline{\omega}_{p1}\overline{\omega}_{p2}} = \frac{2\sqrt{\tan\frac{\overline{\Omega}_{p1}}{2}\tan\frac{\overline{\Omega}_{p2}}{2}}}{T} = \frac{2\sqrt{K_B}}{T}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti NF->PO

$$\overline{\omega}_{p1}\overline{\omega}_{p2} < \overline{\omega}_{a1}\overline{\omega}_{a2} \qquad \overline{\omega}_0^2 = \overline{\omega}_{a1}\overline{\omega}'_{a2} \qquad \overline{\omega}'_{a2} \le \overline{\omega}_{a2}$$

$$(K_B < K_C)$$

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{B}\left(\overline{\omega}'_{a2} - \overline{\omega}_{a1}\right) = \frac{1}{B}\left(\frac{\overline{\omega}_0^2}{\overline{\omega}_{a1}} - \overline{\omega}_{a1}\right) = \frac{\overline{\omega}_0^2 - \overline{\omega}_{a1}^2}{B\overline{\omega}_{a1}} = \frac{\left(\frac{2}{T}\right)^2 K_B - \left(\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_{a1}}{2}\right)^2}{\frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p}\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_{a1}}{2}}$$

$$k_1 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan\frac{\Omega_{a1}}{2}}{K_B - \tan^2\frac{\Omega_{a1}}{2}}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti NF->PO

$$\overline{\omega}_{p1}\overline{\omega}_{p2} > \overline{\omega}_{a1}\overline{\omega}_{a2} \qquad \overline{\omega}_0^2 = \overline{\omega}'_{a1}\overline{\omega}_{a2} \qquad \overline{\omega}'_{a1} \ge \overline{\omega}_{a1}$$

$$(K_B > K_C)$$

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{B}\left(\overline{\omega}_{a2} - \overline{\omega}'_{a1}\right) = \frac{1}{B}\left(\overline{\omega}_{a2} - \frac{\overline{\omega}_0^2}{\overline{\omega}_{a2}}\right) = \frac{\overline{\omega}_{a2}^2 - \overline{\omega}_0^2}{B\overline{\omega}_{a2}} = \frac{\left(\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{T}\right)^2 K_B}{\frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p}\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_{a2}}{2}}$$

$$k_2 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan\frac{\Omega_{a2}}{2}}{\tan^2\frac{\Omega_{a2}}{2} - K_B}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} k_1, & K_B \le K_C \\ k_2, & K_B \ge K_C \end{cases}$$

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Bilinearna transformacija – Predistorzija učestanosti

NF -> NO

$$\tilde{\omega} = \frac{B\overline{\omega}}{\overline{\omega}_0^2 - \overline{\omega}^2}$$

$$B = \tilde{\omega}_p(\overline{\omega}_{p2} - \overline{\omega}_{p1}) = \frac{2\tilde{\omega}_p\left(\tan\frac{\overline{\Omega}_{p2}}{2} - \tan\frac{\overline{\Omega}_{p1}}{2}\right)}{T} = \frac{2K_A\tilde{\omega}_p}{T}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} 1/k_2, & K_B \le K_C \\ 1/k_1, & K_B \ge K_C \end{cases}$$

Isto kao PO

Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Transformacije učestanosti u digitalnom domenu

Umesto da se radi

digitalni -> analogni -> prototipski analogni,
pa nazad

transformacije iz “prototipskog” digitalnog u druge potrebne realizacije moguće je uraditi i u digitalnom domenu

Opšti oblik transformacije je

$$z = f(\hat{z}) = e^{jn\pi}\prod_{i=1}^{m}\frac{\hat{z} - a_i^*}{1 - a_i\hat{z}}$$

gde je z “prototipski”

$\hat{z}$ željeni

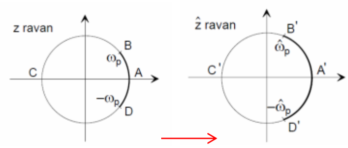
Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Transformacije učestanosti u digitalnom domenu

NF ->NF

$$z = e^{jn\pi}\frac{\hat{z}-a^*}{1-a\hat{z}}$$



A i A′ $e^{j0} = e^{jn\pi}\frac{e^{j0}-a^*}{1-ae^{j0}}$

$n = 0,\quad a = a^* = \alpha$

C i C′ $e^{j\pi} = e^{jn\pi}\frac{e^{j\pi}-a^*}{1-ae^{j\pi}}$

B i B′ $z = e^{j\Omega_p}$, $\hat{z} = e^{j\hat{\Omega}_p}$

$$\alpha = \frac{\sin\frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\sin\frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\hat{z}-z}{1-\hat{z}z}$$

$$z = \frac{\hat{z}-\alpha}{1-\alpha\hat{z}}$$

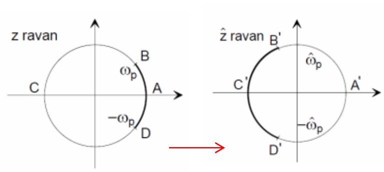
Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Transformacije učestanosti u digitalnom domenu

NF ->VF

$$z = e^{jn\pi}\frac{\hat{z}-a^*}{1-a\hat{z}}$$



A i A′ $e^{j0} = e^{jn\pi}\frac{e^{j\pi}-a^*}{1-ae^{j\pi}}$

$n = 1,\quad a = a^* = \alpha$

C i C′ $e^{j\pi} = e^{jn\pi}\frac{e^{j0}-a^*}{1-ae^{j0}}$

B i B′ $z = e^{j\Omega_p}$, $\hat{z} = e^{j\hat{\Omega}_p}$

$$\alpha = \frac{\cos\frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\cos\frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\hat{z}+z}{1+\hat{z}z}$$

$$z = -\frac{\hat{z}-\alpha}{1-\alpha\hat{z}}$$

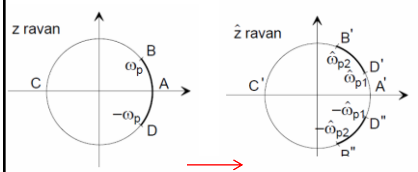
Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Transformacije učestanosti u digitalnom domenu

NF ->PO

$$z = e^{jn\pi}\frac{\hat{z}^2+\beta\hat{z}+\gamma}{1+\beta\hat{z}+\gamma\hat{z}^2}$$



$$n = 1$$

$$\alpha = \frac{\cos\frac{\hat{\Omega}_{p2}+\hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos\frac{\hat{\Omega}_{p2}-\hat{\Omega}_{p1}}{2}}$$

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k}$$

$$\gamma = \frac{k-1}{k+1}$$

$$k = \tan\frac{\Omega_p}{2}\cot\frac{\hat{\Omega}_{p2}-\hat{\Omega}_{p1}}{2}$$

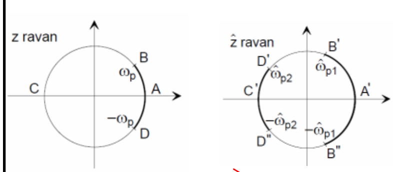
Digitalna obrada signala

Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne

Transformacije učestanosti u digitalnom domenu

NF ->NO

$$z = e^{jn\pi}\frac{\hat{z}^2+\beta\hat{z}+\gamma}{1+\beta\hat{z}+\gamma\hat{z}^2}$$



$$n = 0$$

$$\alpha = \frac{\cos\frac{\hat{\Omega}_{p2}+\hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos\frac{\hat{\Omega}_{p2}-\hat{\Omega}_{p1}}{2}}$$

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k}$$

$$\gamma = \frac{1-k}{1+k}$$

$$k = \tan\frac{\Omega_p}{2}\tan\frac{\hat{\Omega}_{p2}-\hat{\Omega}_{p1}}{2}$$